Андрей Федорович ТАРАКАНОВ,
доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики Борисоглебского государственного педагогического института

Оптимизационная задача эластичности функции

Изучение различных экономических вопросов часто приводит к необходимости выяснения, на сколько процентов изменится одна величина, если другая увеличилась на 1%. Характеристика, дающая ответ на поставленный вопрос, называется *эластичностью* функции. Пусть аргумент x функции $f(x)$ получил положительное приращение Δx. Тогда значение функции изменится на величину: $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$. Приращения Δx и $\Delta f(x)$ называют абсолютными приращениями. Составим относительные приращения и выразим их в процентах: $\frac{\Delta x}{x}100\%$, $\frac{\Delta f(x)}{f(x)}100\%$.

Данные величины показывают, на сколько процентов изменились соответственно значение аргумента и значение функции. Отношение $\left(\frac{\Delta f(x)}{f(x)}100\%\right):\left(\frac{\Delta x}{x}100\%\right)$ показывает, на сколько процентов в среднем меняется (увеличивается или уменьшается) значение функции, когда значение аргумента возрастает на 1% (то есть увеличивается от x до $x+0{,}01x$). Указанное отношение характеризует поведение функции $f(x)$ в данной точке тем точнее, чем меньше Δx.

Перепишем последнее отношение в виде: $E(x) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\frac{x}{f(x)}$. При условии малости Δx величина $E(x)$ называется *эластичностью* функции $f(x)$. Если функция $f(x)$ дифференцируема, то формула эластичности приобретает вид: $E(x) = f'(x)\frac{x}{f(x)}$.

С экономической точки зрения эластичность функции: $y = f(x)$ показывает, на сколько процентов изменится изучаемый параметр y при увеличении значения, влияющего на этот параметр фактора x на 1% (от x до $x+0{,}01x$). Если эластичность $E>1$, то функция эластична, если $E<1$ – неэластична. Если $E=1$, то говорят о единичной эластичности.

В качестве примера вычислим эластичность функции: $f(x) = 3x+4$.

По формуле получим: $E(x) = f'(x)\frac{x}{f(x)} = 3\times\frac{x}{3x+4} = \frac{3x}{3x+4}$.

При $x=2$ эластичность $E(2)=0{,}6$. Это означает, что при увеличении значения x с $x=2$ до $x+0{,}01x=2{,}02$ значение функции возрастает на $0{,}6\%$. Если $x=0$, то $E(0)=0$. Следовательно, при увеличении x от 0 до 0,01 значение функции практически не меняется.

Эластичность функций применяется при анализе спроса и потребления. Пусть цены на аналогичные товары, доходы потребителей и структура их потребностей – постоянные величины. Тогда зависимость спроса s на товар от цены c можно задать функцией: $s = s(c)$. Так как функция спроса, как правило, убывающая относительно цены, то $s'(c) < 0$. Поэтому для функции спроса эластичность $E(c) = \frac{c}{s(c)} s'(c) < 0$, и оценивать ее поэтому надо по абсолютной величине. Например, $E(c) = -0{,}5$ означает, что при увеличении цены c до значения $c + 0{,}01c = 1{,}01c$ спрос уменьшится на 0.5% (именно здесь берется абсолютная величина). Поэтому знак «–» в формуле эластичности для функции спроса совершенно естественно интерпретируется как уменьшение ее значения.

* * *

ЗАДАЧА 1. Опытным путем установлены функции спроса: $s(c) = \frac{c+8}{c+2}$ и предложения: $p(c) = c + 0.5$, где s и p – количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени; c – цена товара. Найти: а) равновесную цену (при которой спрос и предложение уравновешиваются); б) эластичность спроса и предложения для равновесной цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.

Решение

а) Равновесная цена определяется путем решения уравнения: $s(c) = p(c)$. Имеем:

$$c + 8 = (c+2)(c+0{,}5) = c^2 + 2{,}5c + 1,$$

$$c^2 + 1{,}5c - 7 = 0\ ,$$

$$c = \frac{-1{,}5 + \sqrt{1{,}5^2 - 4 \times (-7)}}{2} = \frac{-1{,}5 + \sqrt{2{,}25 + 28}}{2} = \frac{-1{,}5 + 5{,}5}{2} = 2\ .$$

При использовании формулы корней дискриминант взят со знаком «+», так как $c > 0$.

б) Эластичности спроса и предложения (с помощью нижних индексов удобно различать формулы):

$$E_s(c) = \frac{c + 2 - (c+8)}{(c+2)^2} \times \frac{c}{(c+8)/(c+2)} = -\frac{6c}{(c+2)(c+8)}\ .$$

$$E_p(c) = \frac{c}{c + 0.5} = \frac{2c}{2c+1}\ .$$

Для равновесной цены $c = 2$ имеем: $E_s(2) = -0{,}3$, $E_p(2) = 0{,}8$. Так как полученные значения эластичностей по абсолютной величине меньше 1, то спрос и предложение данного товара при равновесной цене неэластичны по цене. Это означает, что изменение цены не приведет к резкому изменению спроса и предложения. Так, при увеличении цены на 1% спрос уменьшится на $0{,}3\%$ (знак «–»), а предложение увеличится на $0{,}8\%$.

в) Функция дохода имеет вид: $d(c) = cs(c)$. Заметим, при увеличении цены на 5% от равновесной спрос уменьшится на: $5 \times 0{,}3\% = 1{,}5\%$. Последовательно вычислим необходимые значения величин:

✓ старая цена: $c = 2$;

✓ новая цена: $c_1 = c + 0{,}05c = 2 + 0{,}05 \times 2 = 2{,}1$;

✓ спрос при цене $c = 2$: $s(2) = (2+8)/(2+2) = 2{,}5$;

✓ спрос при цене $c_1 = 2{,}1$: $s(2{,}1) = (2{,}1+8)/(2{,}1+2) \approx 2{,}46$;

✓ доход от продаж при цене $c = 2$: $d(2) = 2s(2) = 2 \times 2{,}5 = 5$;

✓ доход от продаж при цене $c_1 = 2{,}1$: $d(2{,}1) = 2{,}1s(2{,}1) \approx 5{,}17$.

Следовательно, доход возрастет примерно на:

$d(2{,}1) \times 100 / d(2) = 5{,}17 \times 100 / 5 = 3{,}4\%$.

ЗАДАЧА 2. Известно, что эластичность спроса на товар составляет по абсолютной величине $0{,}4$. Определить, как изменится доход от реализации товара, если цену на него увеличить на 5%.

Решение

При эластичности $0{,}4$ увеличение цены на 1% вызывает уменьшение спроса на $0{,}4\%$. Увеличение цены на 5% приведет к уменьшению спроса на $0{,}4 \times 5 = 2\%$.

Пусть c – цена. Цена выросла на 5% и стала равной $1{,}05c$. Если $s(c)$ – спрос, соответствующий цене c, то спрос при цене $1{,}05c$ составит: $(1\text{-}2/100)\, s(c) = 0{,}98s(c)$, то есть 98% старого спроса.

Доход от реализации товара по цене c составляет $cs(c)$. После увеличения цены он стал равным: $1{,}05c \times 0{,}98s(c) = 1{,}029\, cs(c)$, то есть доход возрос на 2.9%.

Решенные задачи естественно приводят к следующей задаче оптимизации, которую мы сформулируем как исследовательскую в виде ситуации.

ЗАДАЧА 3. На сколько процентов следует изменить цену на товар, чтобы доход от реализации товара был максимален?

Решение

Обозначим искомую величину (изменение цены в процентах) через x. Дальнейшее решение проведем поэтапно, как в задаче 1:

✓ Старая цена: c.

✓ Новая цена: $\tilde{c} = c + 0{,}01xc = c(1 + 0{,}01x)$.

✓ Старый спрос при цене c: $s(c)$.

✓ Увеличение цены c на $x\,(\%)$ приведет к уменьшению спроса на $Ex\,(\%)$, где E – абсолютное значение эластичности.

✓ Новый спрос при цене $\tilde{c}$: $s(\tilde{c}) = (1 - 0{,}01Ex)s(c)$. Заметим, что знак «–» учитывает убывание спроса при повышении цены.

✓ Старый доход: $cs(c)$.

✓ Новый доход:

$u(x) = \tilde{c}s(\tilde{c}) = c(1 + 0{,}01x)(1 - 0{,}01Ex)s(c) = [1 + (0{,}01 - 0{,}01E)x - 0{,}0001Ex^2)]cs(c)$

Таким образом, получили квадратичную функцию относительно x. Геометрически – это парабола с ветвями, направленными вниз, следовательно, максимум существует и единственный. Для нахождения точки максимума функции $u(x)$ решим уравнение: $u'(x) = (0{,}01 - 0{,}01E - 0{,}0002Ex)cs(c) = 0$.

Так как $c > 0$ и $s(c) > 0$, то: $0{,}01 - 0{,}01E - 0{,}0002Ex = 0$, откуда получаем точку максимума: $x = \dfrac{0{,}01 - 0{,}01E}{0{,}0002E} = 50\dfrac{1-E}{E}$.

При $E < 1$ (товар неэластичен) цену следует увеличить на $x(\%)$, в противном случае (товар эластичен) – уменьшить. При $E = 1$ цену не следует изменять. Например, при $E = 0{,}9$ получаем: $x = 50\dfrac{1-0{,}9}{0{,}9} \approx 5{,}6(\%)$, то есть цену надо увеличить на $5{,}6(\%)$, а при $E = 1{,}1$ получаем: $x = 50\dfrac{1-1{,}1}{1{,}1} \approx -4{,}5(\%)$, то есть цену надо уменьшить на $4{,}5(\%)$.

В среде MathCad можно построить график функции $x(E) = 50(1-E)/E$:

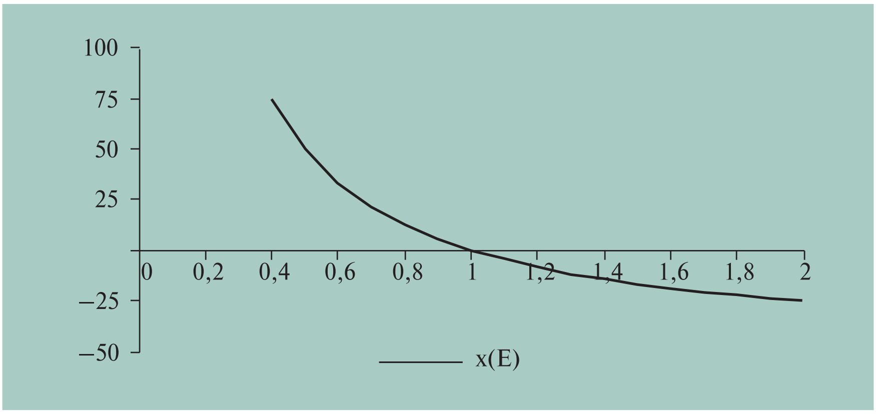

График показывает, что при уменьшении абсолютного значения эластичности цену на товар можно достаточно быстро поднимать. Однако это выгодно только продавцу, поэтому государство защищает потребителей (покупателей), устанавливая максимальные цены на товары и услуги.

В заключение заметим, что производители и продавцы всегда ведут учет потребительского спроса. Для этого спрос изучается с разных позиций: сезонный, по группам потребителей, региональный. На основе полученной информации с помощью математических методов строятся функции спроса, по которым уже несложно произвести необходимые расчеты.